



کمپین حمایت از نهایی های امسال

جزوه خلاصه نکات طلایی



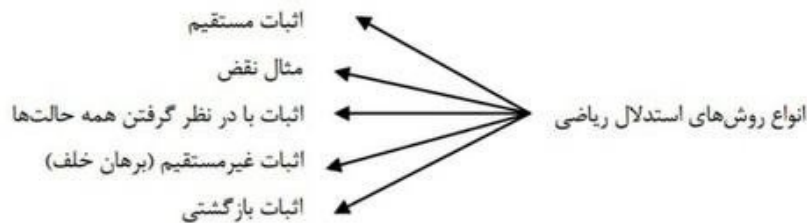
www.alefac.ir

[@arsalanfirouznia](https://www.instagram.com/arsalanfirouznia)

[academyfirooznia](https://www.t.me/academyfirooznia)



فصل اول: نظریه اعداد



✓ اثبات مستقیم:

مثال: با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

راه‌حل: دو عدد فرد رو به صورت $a = 2k + 1$ و $b = 2k' + 1$ تصور کن! حالا نشون بده مجموع این دو عدد به چی تبدیل میشه؟!

$$a + b = (2k + 1) + (2k' + 1) \Rightarrow 2k + 2k' + 2 \xrightarrow{\text{از یه ۲ فاکتور بگیر}} 2(k + k' + 1)$$

$$\Rightarrow 2(k + k' + 1) \Rightarrow 2k''$$

اسم این عبارت رو $2k''$ بزار!

قطعاً $2k''$ عددی زوج‌ه!

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید: «مجموع ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.»

راه‌حل: سه عدد طبیعی متوالی رو به صورت $a = n$ و $b = n + 1$ و $c = n + 2$ تصور کن! حالا با هم جمعشون کن.

$$a + b + c \Rightarrow n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 \xrightarrow{\text{از یه ۳ فاکتور بگیر}} 3(n + 1)$$

به همین راحتی و خوشمزگی ثابت شد که مجموع این اعداد حتماً به ۳ بخش‌پذیره! 😊

مثال: ثابت کنید مجموع هر ۲ عدد گویا عددی گویاست!

راه‌حل: این مثال از ۲ مثال قبلی جدی‌تره پس خوب حواستو جمع کن. خانم یا آقای که دوازدهم ریاضی هستی؛ تعریف اعداد گویا به زبون ریاضی چه جوریه؟!

یعنی اعداد گویا برابر است با کسر $\frac{a}{b}$ به شرطی که a عضو مجموعه اعداد $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ صحیح و b عضو اعداد طبیعی باشد. مخرج رو جوری تعریف کردیم به وقت خدایی نکرده صفر نباشه!

حالا مسئله از ما ۲ تا عدد گویا خواسته بود، یکیش مثلاً $\frac{a}{b}$ یکیش هم $\frac{c}{d}$ با همون شرایطی که قبلاً گفتیم، یعنی:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{c}{d} \mid c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} \right\}$$

قطعاً حاصل ضرب ۲ عدد صحیح به ما یک عدد صحیح میده!

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

و قطعاً جمع ۲ عدد صحیح باز هم یک عدد صحیح دیگه است!

قطعاً حاصل ضرب ۲ عدد طبیعی به ما یه عدد طبیعی میده!

$$ab, cd \in \mathbb{Z}, bd \in \mathbb{N}$$

در نتیجه:

پس دوباره صورت به عدد صحیح و مخرج هم یه عدد طبیعی! پس حتماً مجموع ۲ عدد گویا همواره عددی گویاست!

مثال نقض:

به مثالی گفته می‌شود که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.

مثال: برای نادرستی هریک از گزاره‌ها یک مثال نقض ارائه دهید.

الف) توان دوم یک عدد همواره از آن بزرگ‌تر است.

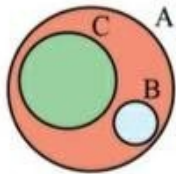
راه‌حل: اگر $x = \frac{1}{4}$ باشد، اون وقت: $x = \frac{1}{4}$ $x^2 = \frac{1}{16}$

ب) اگر x و y اعدادی گنگ باشند، آنگاه x^y نیز یک عدد گنگ است.

راه‌حل: اگر $x = 2^{\sqrt{2}}$ و y برابر $\sqrt{2}$ باشد اون وقت: $x^y = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4 \in \mathbb{Q}$

ج) اگر برای ۳ مجموعه A و B و C داشت باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ است.

راه‌حل:



$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \\ A \cup C = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = A \cup C$$

اما $B \neq C$

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالات:

گاهی برای اثبات یه گزاره لازمه که همه‌ی موارد ممکن در مورد مسئله بررسی بشه و هر حالت رو جداگونه اثبات کنیم و بعد

با توجه به هم‌ارزی $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ حکم کلی مسئله ثابت میشه.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ است.

راه‌حل: برای a ۲ حالت ممکنه رخ بده:

الف) $a = 0$ باشه $\leftarrow$ که در این حالت حکم برقراره!

ب) $a \neq 0$ باشه $\leftarrow$ در این حالت a^{-1} «معکوس عدد a » یک عدد حقیقی است و با ضرب a^{-1} در طرفین رابطه‌ی $ab = 0$

داریم: $ab = 0 \rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$

$$\rightarrow b = 0$$

پس حکم در هر ۲ حالتی که در نظر گرفتیم برقرار و ثابت!

مثال: نشان دهید حاصل ضرب ۲ عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.

راه‌حل: فرض کنیم n و $n+1$ دو عدد صحیح و متوالی باشند. ۲ حالت به وجود میاد!

الف) n زوج باشه؛ که داریم $\Leftarrow$

ب) پس $n(n+1)$ زوج است!

$$n = 2k \Rightarrow n(n+1) = 2k(2k+1)$$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{k(2k+1)}_{k'}) = 2k'$$

ب) n فرد باشه؛ که داریم: $\Leftarrow$

$$n = 2k+1 \Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(2k+2)$$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{(k+1)(2k+1)}_{k'}) = 2k'$$

پس باز هم $n(n+1)$ زوج است.

در واقع اگر زوج بودن n رو p و فرد بودن n رو q و همچنین زوج بودن $n(n+1)$ رو r نشون بدیم؛ با هم ثابت کردیم

$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ که هم‌ارزه با $p \vee q \Rightarrow r$ و حکم به صورت کلی ثابت شد.

✓ برهان خلف:

قبلاً تو هندسه ۱ با این روش آشنا شدیم.

مراحل ساده‌ای داده خوب حواساتونو جمع کنی تا یاد بگیری!

- ۱- فرض خلف: فرض می‌کنیم نتیجه‌ای که مسئله گفته گیرم درست نباشه! فرضه دیگه! اشکالی نداره که!
 - ۲- با استفاده از روش اثبات مستقیم جلو میریم. بعد متوجه می‌شیم یه جای کار میلنگه! چون با این فرض خلف به نتایجی رسیدیم که حقایق قلبی رو نقض می‌کنه!
 - ۳- حالا غلط کردم گویان! می‌فهمیم که به تناقض رسیدیم و در نتیجه فرض خلف غلطه آی غلطه، بنابراین نتیجه‌ای که مسئله همون اول گفته بود ثابت میشه که درست بوده.
- چی شده؟! متوجه نشدید؟! بابا نگران نباشید تا منو دارید غم ندارید. الان ۲ تا مثال مستی می‌زنم براتون که کامل شیرفهم شید. بزن بریم!

مثال: ثابت کنی اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x - y$ نیز گنگ است.

راه‌حل: بیایید اصلاً فرض کنیم $x - y$ گویا باشه. «فرض خلف»:

ما خودمون می‌دونیم تفاضل دو تا عدد گویای فرد حسابی! از هم دیگه باز هم گویاست.

مثلاً تفاضل x که گویاست از $x - y$ که فرض کردیم گویاست برابره با یه عدد گویای دیگه!

$$(x - y) - x \Rightarrow x - x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow -y \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow y \in \mathbb{Q}$$

اوا خاک به سرم مگه حقایق مسئله نگفته بود y عددی گنگ است؟! به تناقض رسیدیم که!

بله دقیقاً همینطور، پس حتماً فرض خلف باطل و حکم ثابت است. ☺

مثال: ثابت کنی اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است:

راه‌حل: فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گویا باشه «فرض خلف»

همچنین ما خودمون می‌دونیم ضرب هر عدد گنگ در گویا گنگ می‌شه.

خب با توجه به چیزی که گفتیم باید ضرب عدد x که گنگه در $\frac{1}{x}$ که فرض کردیم گویاست؛ گنگ بشه.

ولی ای دل غافل! $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ مگه ۱ عدد گنگه! پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

✓ اثبات بازگشتی:

مثال: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، ثابت کنی $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

راه‌حل: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$\rightarrow (a - b)^2 \geq 0$ که بدیهی است

حالا که به یه چیز بدیهی رسیدیم، دونه دونه راه‌حل‌هایی که نوشتیم رو برعکس می‌ریم. البته لازم به ذکره که لازم نیست

اینطوری دوباره از اول بنویسیم: $(a - b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \rightarrow \dots$

فقط کافیه تو عبارت اولی که نوشته بودیم؛ از آخر شروع کنیم به چک کردن و هر جا که علامت $\rightarrow$ دیدیم تبدیل کنیم به

$\leftarrow$. اگر همین درست باشه و همه‌ی علامت‌ها به $\leftarrow$ تبدیل شده باشن؛ حکم ثابت میشه. یعنی در آخر به یه همچین چیزی

می‌رسیم:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

مثال: ثابت کنید:

الف) اگر هر سه عدد X و Y و Z حقیقی باشند. آنگاه: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

راه حل: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - yz + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} - zx \geq 0$

در نظر داشته باشید که مجموع چند عدد نامنفی «یعنی مثبت یا صفر» قطعاً یا برابر صفره یا بزرگتره.

ب) اگر هر دو عدد X و Y حقیقی باشند آنگاه: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

راه حل: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + \frac{x^2}{2} - x + \frac{y^2}{2} - y + 1 \geq 0$

مثال: درستی رابطه زیر را بررسی کنید: $a^2 + 1 \geq b(2 - b)$

$$a^2 + 1 \geq b(2 - b) \iff a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \iff a^2 + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\iff a^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

✓ بخش پذیری و عاد کردن:

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $a = bq$

باشد، در این صورت می‌نویسیم $b | a$ یعنی b عاد می‌کند a را: $b | a \iff a = bq$

۱- اگر عبارت $a | a$ را دیدیم؛ قطعاً a عددی نیست جز صفر. یعنی صفر فقط صفر را عاد می‌کند.

۲- اگر a عددی طبیعی باشد آنگاه $1 | a$ و $a | a$ ، یعنی هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش پذیر است.

۳- هر عددی صفر را می‌تواند عاد کند: $a | 0$

✓ خواص و ویژگی‌های روابط عاد کردن:

۱- برای هر عدد طبیعی m و n که n بزرگتر مساوی m باشد داریم: $a^m | a^n$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$\text{مثال: } 2^4 | 2^9 \xrightarrow{q=2^5} 2^9 = 2^4 \times 2^5$$

۲- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد. $a | b \Rightarrow a | mb$

$$\text{مثال: } 7 | 14 \Rightarrow 7 | 14 \times 5$$

۳- اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه b^n را به شرطی که $n \in \mathbb{N}$ نیز می‌شمارد. $a | b \Rightarrow a | b^n, n \in \mathbb{N}$

$$\text{مثال: } 3 | 6 \Rightarrow 3 | 3^2$$

۴- اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را، آنگاه a عدد c را می‌شمارد «خاصیت تعدی» $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$

$$\text{مثال: } 3 | 9 \wedge 9 | 18 \Rightarrow 3 | 18$$

۵- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$

$$\text{مثال: } 7 | 14 \wedge 7 | 21 \Rightarrow \begin{cases} 7 | 14 + 21 \Rightarrow 7 | 35 \\ 7 | 14 - 21 \Rightarrow 7 | -7 \end{cases}$$

۶- اگر $a | b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $a = \pm b$

۷- اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^n$ $a|b \Rightarrow a^n|b^n$

مثال: $3|-6 \Rightarrow \begin{cases} 9|36 \\ 27|-216 \end{cases}$

۸- اگر $a|b$ و $c|d$ آنگاه داریم: $ac|bd$ $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

یعنی ۲ طرف بخش پذیری را می توان در هم ضرب کرد: $5|15 \Rightarrow 20|180$ ، $4|12$: مثال

۹- اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb \pm nc$ ، $(n, m \in \mathbb{Z})$ ترکیب خطی
 $a|b \wedge a|c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a|mb \pm nc$

مثال: $2|6, 2|4 \xrightarrow[n=5]{m=3} \begin{cases} 2|3 \times 6 + 5 \times 4 \Rightarrow 2|38 \\ 2|3 \times 6 - 5 \times 4 \Rightarrow 2|-2 \end{cases}$ « n و m اعداد صحیح اند»

✓ اعداد اول:

هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ که هیچ شمارنده ی مثبت دیگری به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود پس اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد و $a|p$ در این صورت $a=1$ یا $a=p$ است.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=9$ است.

راه حل: $a|9k+7 \Rightarrow a|7 \times (9k+7) \Rightarrow a|63k+49$

$a|7k+6 \Rightarrow a|9 \times (7k+6) \Rightarrow a|63k+54$

$\Rightarrow a|(63k+54) - (63k+49) \Rightarrow a|5 \xrightarrow{\text{عدد اول است}} a=1 \quad a=5$

تذکر: این جور مسائل رو به خوبی یاد بگیرید؛ قطعاً شباهش تو امتحانات دی و خردادتون میاد. باید k رو سعی کنید با قوانین ۱ تا ۹ که توضیح دادم از بین ببرید و بعد متوجه شید a چه اعدادی می تونه باشه!!

مثال: اگر $a > 1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

راه حل: $a|5k+3 \Rightarrow a|9 \times (5k+3) \Rightarrow a|45k+27$

$a|9k+4 \Rightarrow a|5 \times (9k+4) \Rightarrow a|45k+20$

$\Rightarrow a|(45k+27) - (45k+20) \Rightarrow a|7 \xrightarrow{\text{عدد اول است}} a=1 \quad a=7$

با توجه به فرضیات مسئله $a > 1$ پس $a \neq 1$ و $a=7$ می باشد.

✓ بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م):

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه ۲ شرط روبه رو برقرار باشد:

الف) $d|a$ و $d|b$ ب) $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

مثال: $(8, 16) = 8$ و $(6, 9) = 3$ و $(3, 4) = 1$

✓ کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

عدد طبیعی C را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می نامیم و می نویسیم $[a, b] = c$. هرگاه ۲ شرط زیر برقرار باشد.

$$\forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow c \leq m \quad \text{ب) } a | c \text{ و } b | c \quad \text{الف)}$$

$$[1, 8] = 8 \text{ و } [3, 4] = 12 \text{ مثال}$$

✓ با توجه به تعاریف ک.م.م و ب.م.م داریم:

$$1- \text{ اگر } a | b \text{ آنگاه } (a, b) = |a|$$

$$2- \text{ اگر } a | b \text{ آنگاه } [a, b] = |b|$$

✓ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ آنگاه $(p, a) = 1$. دقت کنید که در مورد اعدادی که اول نباشند این نکته برقرار نیست.

$$\text{مثال: } 8 \nmid 12 \xrightarrow{\text{ولی}} (8, 12) = 4 \neq 1$$

سوال: ثابت کنید که $9n + 8$ و $8n + 7$ نسبت به هم اولند؟

راه حل: برای اثبات $(9n + 8, 8n + 7) = 1$ ابتدا d را ب.م.م آن در نظر بگیریم:

$$(9n + 8, 8n + 7) = d \xrightarrow[\text{ب.م.م داریم}]{\text{با توجه به تعاریف}} \begin{cases} d | 9n + 8 \\ d | 8n + 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | 8(9n + 8) - 9(8n + 7)$$

«یادتونه؟! باید سعی کنیم n رو از بین ببریم»

$$\Rightarrow d | 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

✓ قضیه تقسیم:

با این قضیه تو حسابان دوازدهم هم حسابی کار داریم. پس خوب حواستونو جمع کنید!

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به طوری که: الف) $a = bq + r$ و مهم تر از آن: ب) $0 \leq r < b$.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید.

راه حل: به به! به یکی از سؤال خیزترین قسمت های گسسته رسیدیم، حواستونو خوب جمع کنید.

با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} \text{فرض } m = 17q_1 + 5 &\Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases} \\ \text{فرض } n = 17q_2 + 3 &\Rightarrow \\ \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 &\xrightarrow[\text{باید } 0 \leq r < b]{\text{از اون جایی که } r} 17(2q_1 - 5q_2 - 1) + 17 - 5 \\ \Rightarrow (2m - 5n) = 17(q_3 - 1) + 12 &\Rightarrow 2m - 5n = 17q + 12 \Rightarrow r = 12 \end{aligned}$$

پیشنهاد می کنم این سؤال رو به بار دیگه با دقت بخون!!

مثال: در معادله $a = 8q - 5$ مقدار باقی مانده را به دست آورید:

راه حل: در قضیه تقسیم داشتیم $0 \leq r < b$ پس:

$$a = 8q - 5 \Rightarrow a = 8(q - 1) + 8 - 5 \Rightarrow a = 8q' + 3 \rightarrow r = 3$$

✓ افزاز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم:

اول از همه افزاز رو یادتون میاد دیگه؟! تو آمار احتمال یازدهم خوندم!

فرض می‌کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد، گوییم $n \in \mathbb{N}$ به A زیر مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افزاز شده است اگر

$$1- \text{ برای هر } (1 \leq i \leq n), A_i = \emptyset$$

$$2- \text{ برای هر } i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ «یعنی } 2 \text{ به } 2 \text{ از هم جدا باشند»}$$

$$3- A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \text{ (اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌ها برابر خود مجموعه‌ی اصلی است)}$$

حال که افزاز یادآوری شد، با توجه به قضیه تقسیم، می‌دانیم اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b ، و با توجه به اینکه باقی مانده‌ی تقسیم یعنی r در رابطه‌ی $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر 5 تقسیم کنیم و در این صورت یا a بر 5 بخش پذیر است یعنی $r = 0$ یا باقی‌مانده 1 و 2 و 3 و 4 است. به عبارتی $a = 5k$ یا $a = 5k + 1$ یا $a = 5k + 2$ یا $a = 5k + 3$ یا $a = 5k + 4$ است. یعنی عدد صحیح a را می‌توان به یکی از 5 صورت فوق نوشت، همچنین به هریک از حالات یک کلاس گفته می‌شود.

مثال: ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 ، مساوی با 1 است.

راه حل: هر عدد فرد رو می‌شه به صورت $a = 4k + 1$ و $a = 4k + 3$ نوشت. اگر دقت کنید در مسئله ازمون مربع خواستن، پس بیاید زود دست به کار شیم.

$$a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 \Rightarrow 8k' + 1$$

$$a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9$$

$$\Rightarrow 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8k'' + 1$$

پس در هر دو حالت، مربع هدد فرد به شکل $8k + 1$ نوشته می‌شه!

مثال: اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3 \nmid n^2 - n$

راه حل: بیایید برای n حالت $3 \nmid n$ و $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ در نظر بگیریم.

در این صورت داریم: $3 \mid (n-1)n(n+1)$

$$\Rightarrow^{(1)} n = 3k : (3k-1)3k(3k+1) \xrightarrow[\text{قطعا } 3k]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid (3k-1)3k(3k+1) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow^{(2)} n = (3k+1) : 3k(3k+1)(3k+2) \xrightarrow[\text{قطعا } 3k]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid 3k(3k+1)(3k+2) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow^{(3)} n = 3k+2 : (3k+1)(3k+2)3k \xrightarrow[\text{قطعا } 3k]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid (3k+1)(3k+2)3k \quad \checkmark$$

✓ هم‌نهشتی:

برای هر عدد طبیعی همانند m و هر دو عدد صحیح ماند a و b ، اگر $m \mid a - b$ یعنی a بر b هم باقی مانده باشند،

می‌گوییم a هم‌نهشت با b است و می‌نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad m \in \mathbb{N}$$

به زبان ریاضی یعنی:

✓ خواص و ویژگی‌های هم‌نهشتی:

$$a \equiv a^m, \forall a \in \mathbb{Z}$$

$$a \equiv b \Rightarrow b \equiv a^m$$

۱- الف) هر عدد صحیح مانند a به پیمانه m با خودش هم‌نهشت است.

ب) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m باشد، آنگاه b هم‌نهشت با a به پیمانه m نیز است.

پ) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m و b هم‌نهشت با c به پیمانه m باشد، آنگاه a هم‌نهشت با c به پیمانه m نیز است.

$$a \equiv b^m, b \equiv c^m \Rightarrow a \equiv c^m$$

۲- به دو طرف یک معادله و رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح اضافه یا کم کرد:

$$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c^m$$

۳- دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد:

$$a \equiv b^m \Rightarrow ac \equiv bc^m$$

تذکر: قانون حذف برای رابطه‌ی هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست. یعنی اگر $ac \equiv bc^m$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b^m$. به؛ قانون حذف شرط و شروط دارد؛ اگر اون شروط که در جلوتر بهش اشاره خواهیم کرد رو نداشته باشه نمی‌تونیم

همینطوری عشقی دو تا عدد رو از این ور اون ور رابطه خط بزنینم! ☺

$$a \equiv b^m \Rightarrow a^n \equiv b^n^m \quad (n \in \mathbb{N})$$

۴- دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان n برسانیم؛ $(n \in \mathbb{N})$

تذکر: عکس این قانون هم در حالت کلی برقرار نیست؛ یعنی نمی‌توان از دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی ریشه گرفت.

۵- دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد و یا حتی ضرب:

$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ c \equiv d^m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd^m \\ a \pm c \equiv b \pm d^m \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a \equiv b^m \\ c \equiv d^m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd^m \\ a \pm c \equiv b \pm d^m \end{cases}$$

۶- می‌توان به ۲ طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk^m, \quad (t, k \in \mathbb{Z})$$

۷- اگر بخواهیم ۲ طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را به عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر بمم آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc^m, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b^{\frac{m}{d}}$$

این قانون، همون شرط و شروط تو تذکر قانون سوم بود. ☺

$$a = mq + r \Leftrightarrow a - r = mq$$

۸- اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت: $a \equiv r^m$

$$\Leftrightarrow m | a - r \Leftrightarrow a \equiv r^m$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم هم‌نهشت عدد a را به پیمانه m مشخص کنیم، کافیه عدد a را بر m تقسیم و باقی‌مانده رو به دست بیاریم.

نتیجه ۲: اگر a و b بر عدد طبیعی m ، هم باقی مانده باشن، یعنی باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m با هم برابر باشن، در این صورت: $a \equiv b^m$



مثال: اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۹ برابر ۴ باشد، باقی مانده تقسیم $2a^2 + 5$ بر ۹ چیست؟

راه حل: خب ببینم... شروع کنید! همین الآن ۸ تا نکته خفن یاد گرفتیم؛

اول از همه؛ چون باقی مانده تقسیم a بر ۹ برابر ۴ عه؛ در نتیجه:
پس داریم $\Leftarrow$

$$a \equiv 4^9$$

$$a \equiv 4^9 \rightarrow a^2 \equiv 4^{18} \xrightarrow{\times 2} 2a^2 \equiv 32^9$$

$$\xrightarrow{+5} 2a^2 + 5 \equiv 37^9 \xrightarrow{37 \equiv 1} 2a^2 + 5 \equiv 1^9$$

پس باقی مانده برابر ۱ است!

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $A = (53)^{15} + 33$ بر ۱۳ بیابید.

راه حل: می دونیم که برای پیدا کردن باقی مانده A بر عدد ۱۳، باید هم نهشتی A به پیمانه ۱۳ رو بنویسیم و بعد ساده کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 53 = 13 \times 4 + 1 \Rightarrow 53 \equiv 1 \Rightarrow (53)^{15} \equiv 1^{15} \equiv 1 \\ 33 = 13 \times 2 + 7 \Rightarrow 33 \equiv 7 \end{array} \right\} \Rightarrow (53)^{15} + 33 \equiv 1 + 7 \rightarrow A \equiv 8 \rightarrow r = 8$$

✓ باقی مانده تقسیم بر اعداد خاص:

مثال: رقم یکان اعداد رو به رو را به دست آورید. $7^{49} + 2$ و 3^{256}

راه حل: اگر دقت کنی متوجه یه چیزی میشی!

آفرین! برای به دست آوردن رقم یکان این اعداد فقط کافیه باقی مانده ی تقسیم آن ها بر عدد ۱۰ رو به دست بیاریم. یکم بیشتر

فک کن...! آباریکلا ☺

یعنی هم نهشتی به پیمانه ۱۰.

$$3^{256} \equiv ? \rightarrow 3^2 \equiv 9 \equiv -1 \rightarrow (3^2)^{128} \equiv (-1)^{128} \rightarrow 3^{256} \equiv 1$$

$$7^{49} + 2 \equiv ? \rightarrow 7^2 \equiv 49 \equiv -1 \rightarrow (7^2)^{24} \equiv (-1)^{24} \rightarrow 7^{48} \equiv 1 \times 7$$

$$\rightarrow 7^{49} \equiv 7 \rightarrow 7^{49} + 2 \equiv 9$$

✓ برای به دست آوردن رقم یکان اعداد توان دار، کافی ست باقی مانده تقسیم آن بر ۱۰ را به دست آوریم، مثلاً عدد n رقمی

$A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0$ را بسط داده و در هم نهشتی به پیمانه ی ۱۰ به جای هر توان ۱۰ عدد صفر قرار می دهیم و داریم

$A \equiv a_0$. چی شد؟! نفهمیدید؟! بابا منظورم همونیه که تو اول راه حل مثال بالا توضیح دادم. زیاد سخت نگیر اگه سوال قبلی رو

متوجه شدی یعنی این نکته رو هم یاد گرفتی. برو نکته بعدی! ☺



✓ باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ و ۳:

خانم یا آقای محترمی که رشته ریاضیه! مطمئنم تو این چندین سالی که عمر با عزت از خدا گرفتی حداقل یه بار تو زندگیت شنیدی که میگن: «باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۹ و ۳ برابر است با باقی مانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹ و ۳» اما نمی دونستی که این نکته از کجا اومده! خب انتظاراتها به پایان رسید چون مربوط به همین هم‌نهشتیه.

عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$ را بسط داده و در هم‌نهشتی به پیمانه ۹، به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم. «چرا که: $10 \equiv 1 \Rightarrow 10^n \equiv 1$ »

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + 10^{n-2} \times a_{n-2} + \dots + 10^2 \times a_2 + 10 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_{n-2} + \dots + 1 \times a_2 + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

به همین ترتیب برای عدد ۳ هم اثبات می‌شود.

✓ باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۱۱:

به دلیل اینکه $10 \equiv -1$ ، بنابراین برای هر n زوج، $10^n \equiv 1$ و برای هر n فرد $10^n \equiv -1$ است اگر در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد A به جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد منفی یک (-1) قرار دهیم، باقی مانده‌ی عدد A بر ۱۱ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \text{مثال: } 354971 \equiv ? \rightarrow A &= 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \\ \rightarrow A &\equiv 3 \times (-1) + 5 \times 1 + 4 \times (-1) + 9 \times 1 + 7 \times (-1) + 1 \Rightarrow A \equiv -3 + 5 - 4 + 9 - 7 + 1 \\ &\rightarrow A \equiv 1 \rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

باقی مانده $A \rightarrow r = 1$

✓ باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰:

عدد ۱۰ به ۲ و ۵ و ۱۰ بخش پذیر است و دارای باقی مانده صفر می باشد، یعنی:

$$10 \equiv 0 \Rightarrow 10^n \equiv 0, 10 \equiv 0 \Rightarrow 10 \cdot n \equiv 0, 10 \equiv 0 \Rightarrow 10 \cdot n \equiv 0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$ به جای توان‌های عدد ۱۰ در هم‌نهشتی به پیمانه ۲، ۵، ۱۰ عدد صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + 0 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow 10 \equiv a_0$$

خلاصه یعنی، کافیه برای باقی مانده تقسیم بر اعداد ۲ و ۵ و ۱۰ فقط به یکان‌ها توجه و بررسی کنیم.

✓ محاسبه روزهای هفته در تاریخ‌های مختلف:

عزیزان دلم، این سوالات در امتحانات مطرح می‌شن تا ببینن در چه حد از هم‌نهشتی و مسائل مختلفش درک دارید؛ نه اینکه تو چرکنویس بشینید هفت ساعت تقویم و جدول بکشید.

دست از این کارها بردارید و قلب بنده‌ی حقیر رو خدشه‌دار نکنید به جاش از نکته‌هایی که میگم استفاده کنید:

هر روز از هفته بعد از گذشت ۷ روز دوباره تکرار میشه. به عنوان مثال اگر ۵ آبان روز دوشنبه باشه، در این صورت ۱۲، ۱۹ و ۲۶ آبان نیز دوشنبه است. حالا اگر فاصله‌ی ۵ آبان تا ۲۳ آبان رو حساب کنیم میشه $23 - 5 = 18$ ، ۲۳، ۱۸، روز، و چون $18 \equiv 4 \pmod{7}$ کافیه دوشنبه رو مطابق جدول زیر مبدأ یعنی صفر فرض کنید، بعد ۴ روز بعد رو مشخص کنید که چه روزی از هفته است یا عدد ۴ متناظر با کدوم روزه:

دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
0	1	2	3	4	5	6

در این تیپ سوال‌ها حواستون به سال کیبسه، ۶ ماه اول سال که ۳۱ روزه هستند؛ باشه!

✓ معادله هم‌نهشتی:

یک رابطه‌ی هم‌نهشتی همراه با مجهولی مثل X به فرم $ax \equiv m$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل، آن پیدا کردن همه‌ی جواب‌هایی مثل $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در معادله فوق صدق کند.

مثال: معادله‌ی $x \equiv 3$ را حل کنید و جواب‌های عمومی این معادله را به دست آورید.

راه‌حل: $x \equiv 3 \Rightarrow x - 3 = 4k \Rightarrow x = 4k + 3, (k \in \mathbb{Z})$

تذکر: در این مثال ضریب X عدد ۱ است. اما اگر ضریب X عددی غیر از یک باشد، برای به دست آوردن جواب‌های عمومی معادله باید از ویژگی‌های هم‌نهشتی استفاده کنیم. به مثال بعد توجه کنید:

مثال: جواب‌های عمومی معادله‌ی $5x \equiv 27$ را به دست آورید:

راه‌حل:

$$\left. \begin{array}{l} 5x \equiv 27 \\ 27 \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x \equiv 3$$

طبق ویژگی‌های هم‌نهشتی و عاد کردن می‌توان به ۲ طرف یک رابطه هر مضربی از پیمانه را کم یا اضافه کرد.

$$a \equiv b \rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

بنابراین اگر $t = 0$ و $k = 2$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} 5x \equiv 3 &\rightarrow 5x + 6 \times 0 \equiv 3 + 6 \times 2 \rightarrow 5x \equiv 15 \xrightarrow{(5,6)=1} 5x \equiv 3 \times 3 \\ &\rightarrow x \equiv 3 \rightarrow 6 | x - 3 \rightarrow (x - 3) = 6k \rightarrow x = 6k + 3, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

✓ معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب صحیح است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$

کتاب درسی گفته این قضیه رو بدون اثبات بپذیرید پس ما هم بیشتر از این توضیحی نمیدیم چون به دردتون نمیخوره!
نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ ، چون برای هر b ، همواره $1 \mid b$ پس معادله‌ی $ax \equiv b \pmod{m}$ همواره دارای جواب صحیح خواهد بود.
مثال: معادله‌ی $4x \equiv 13 \pmod{6}$ را حل کنید.

راه‌حل: اع حواس‌تو جمع کن همین الان نکته‌اشو گفتم!

پس سوال سرکاری بود ☺

این معادله دارای جواب صحیح نیست! $\rightarrow 13/6 \rightarrow 2 \rightarrow 2 = (4, 6)$

✓ معادله‌ی سیاله:

هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله‌ی $ax + by = c$ «یعنی X و Y » را در اعداد صحیح بیابیم $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ در این صورت معادله‌ی مذکور « $ax + by = c$ » را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌گوییم.

✓ تبدیل معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی:

معادله سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به صورت ۲ می‌تواند به یک معادله‌ی هم‌نهشتی با یک مجهول «یا X یا Y » تبدیل شود:

$$1) \quad ax + by = c \rightarrow ax - c = (-b)y \rightarrow -b \mid ax - c \rightarrow b \mid ax - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax \equiv c \pmod{b} & (b > 0) \\ ax \equiv c \pmod{b} & (b < 0) \end{cases} \Rightarrow ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$2) \quad ax + by = c \rightarrow by - c = (-a)x \rightarrow -a \mid by - c \rightarrow a \mid by - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} by \equiv c \pmod{a} & (a < 0) \\ by \equiv c \pmod{a} & (a > 0) \end{cases} \Rightarrow by \equiv c \pmod{|a|}$$

تذکر: یادمون نره که شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب صحیح باشه اینه که $(a, b) \mid c$

✓ روش حل معادله‌ی سیاله:

۱- ابتدا معادله‌ی $ax + by = c$ را به صورت یک معادله‌ی هم‌نهشتی؛ مثلاً $ax \equiv c \pmod{b}$ می‌نویسیم.

۲- با استفاده از ویژگی‌های هم‌نهشتی، ضریب X را تبدیل به ۱ می‌کنیم و X را به صورت یک معادله بر حسب k می‌نویسیم.

۳- با جایگذاری مقدار X در معادله‌ی اصلی، مقدار Y را نیز به همین ترتیب به دست می‌آوریم. چی شد؟! گیج شدید؟! مثال بعد رو با دقت نگاه کنید شیرفهم می‌شید. ☺

مثال: جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله خطی $3x + 7y = 17$ را به دست آورید.

راه‌حل: اول اینکه $17 \mid (3, 7)$ ، پس معادله اوکیه!

ابتدا معادله‌ی $3x + 7y = 17$ را به صورت یک معادله‌ی هم‌نهشتی $3x \equiv 17 \pmod{7}$ می‌نویسیم و سپس مضرب‌هایی از عدد ۷ را به عدد ۱۷ اضافه می‌کنیم تا مضربی از ۳ شود.

$$3x \equiv 17 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 17 + 1 \times 7 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 24 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 3 \times 8 \pmod{7}$$

$$\xrightarrow{(3,7)=1} 3x \equiv 3 \times 8 \pmod{7} \rightarrow x \equiv 8 \pmod{7} \rightarrow x = 7k + 8$$

حال مقدار x را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

$$3(7k + 8) + 7y = 17 \rightarrow 21k + 7y = -7 \xrightarrow{+7} 21k + y = -1 \rightarrow y = -21k - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7k + 8 \\ y = -21k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{جواب‌های عرفی معادله‌ی سیاله‌ی خطی:}$$

مثال: آیا می‌توانیم یک جعبه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۲ و ۵ کیلویی وزن کنیم؟ اگر بله؛ به چند طریق؟

راه‌حل: x را تعداد وزنه‌های ۲ کیلویی و y را تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی در نظر می‌گیریم.

یعنی معادله سیاله به صورت: $2x + 5y = 23$ خواهد شد.

حال کفایت جواب‌های عمومی معادله را برحسب k بیابیم و به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشد تعداد حالت‌ها را

شمارش کنیم.

$$2x + 5y = 23 \xrightarrow{\text{تبدیل به معادله}} 2x \equiv 23 \pmod{5} \rightarrow 2x \equiv 23 - 3 \times 5 \pmod{5} \rightarrow 2x \equiv 8 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{(2,5)=1} 2x \equiv 8 \pmod{5} \rightarrow x \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 4$$

حال مقدار x را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$2(5k + 4) + 5y = 23 \Rightarrow 10k + 8 + 5y = 23 \rightarrow 10k + 5y = 15$$

$$\xrightarrow{+5} 2k + y = 3 \rightarrow y = -2k + 3$$

$$\begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = -2k + 3 \end{cases} \rightarrow k = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ y = 3 \end{cases} \gg k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

بنابراین به ۲ طریق فوق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

فصل دوم: گراف و مدل سازی

گراف ساده

گراف ساده G زوج مرتبی مثل (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است که اعضای آن را رأس می‌گوییم و E مجموعه‌ای است که هر عضو آن زیرمجموعه‌ای دو عضوی از V است. به اعضای E یال می‌گوییم. دقت کنید که با داشتن شکل گراف، می‌توانید مجموعه‌های (V, E) را بنویسید و هم چنین با داشتن دو مجموعه (V, E) می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ که آن را با (V, E) نیز نمایش می‌دهیم؛ رأس مشخص کنید و سپس با توجه به (V, E) ، رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

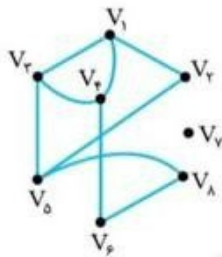
؟ سوال: با توجه به شکل، مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف G را مشخص کنید.

! راه‌حل: مجموعه رأس‌های گراف G :

$$V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8\}$$

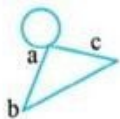
مجموعه یال‌های گراف G :

$$E(G) = \{V_1V_2, V_1V_3, V_1V_4, V_2V_5, V_3V_4, V_3V_6, V_4V_5, V_4V_6, V_5V_7, V_6V_8, V_7V_8\}$$



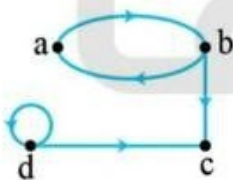
حالت‌های مختلف بررسی گراف:

۱ - طوقه: یالی که از یک رأس به خودش متصل شود؛ مثل شکل روبه‌رو در رأس a



۲ - گراف جهت‌دار: یال‌های آن دارای جهت است؛ در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس است، یال را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \text{ و } E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, c), (d, d)\}$$



۳ - گراف چندگانه: گرافی که بین دو رأس آن، ممکن است چندین یال موجود باشد، مانند گراف روبه‌رو که بین رأس a و b بیش از یک یال وجود دارد.

تذکر: اگر این ۳ حالت فوق برای یک گراف پیش آید، دیگر گراف ساده نیست.

✓ مرتبه گراف: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را گویند، با p نمایش می‌دهند.

✓ اندازه گراف: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را گویند، با q نمایش می‌دهند.

✓ درجه یک رأس: درجه رأس a در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس a متصل‌اند و آن را با (da) نمایش می‌دهند. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را یک رأس فرد می‌نامند و برعکس!

✓ گراف منتظم: گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد k باشد را گراف k -منتظم می‌نامیم.

مثال: گراف ۲-منتظم از مرتبه ۶، یک گراف با رأس ۶ است که درجه هر رأس ۲ می‌باشد.



مثل شکل مقابل.

✓ رأس تنها «ایزوله» به رأسی که درجه آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی نداشته باشد می‌گویند.

✓ گراف تهی: گرافی که تمام رئوس آن رأس ایزوله باشد، یعنی هیچ یالی نداشته باشد را گویند.

مثال: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

(الف) در یک گراف، یالی که از یک رأس به خودش متصل می‌شود را، می‌نامند.

(ب) مرتبه گراف نشان دهنده تعداد گراف است و با حرف نمایش می‌دهند.

(ج) گرافی که تمام رئوس آن ایزوله باشد را گراف می‌نامیم.

(د) گراف k -منتظم گرافیست که

راهنما: الف) طوقه ب) رأس‌های P (ج) تهی

(د) درجه تمام رئوس آن با هم برابر و مساوی با عدد k باشد.

✓ مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم V یکی از رأس‌های گراف G باشد؛

به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس V متصل هستند، «همسایگی باز رأس V » می‌گوییم و با $N_G(V)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر خود رأس V را به مجموعه $N_G(V)$ اضافه کنیم، «همسایگی بسته، رأس V » حاصل می‌شود که با $N_G[V]$ نمایش می‌دهیم.

✓ در یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن رأس متصل باشند.

✓ دو رأس مجاور «همسایه»: دو رأس u و v را دو رأس همسایه یا مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G)$. یعنی یال uv عضو مجموعه یال‌های گراف باشند.

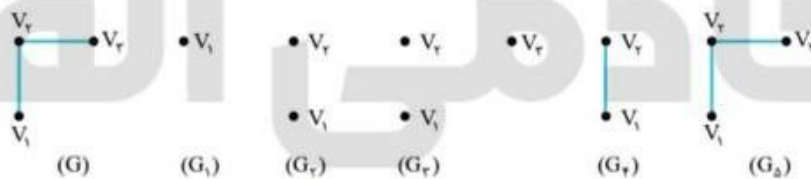
✓ بزرگترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگترین درجه در بین درجات رئوس گراف را با $\Delta(G)$ یا همان «دلتای بزرگ» و کوچک‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف G را با $\sigma(G)$ یا همان «دلتای کوچک» نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکسیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم.

✓ زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

در هر گراف مانند G ، یک رأس تنها می‌تواند کوچک‌ترین زیرگراف باشد.

همچنین هر گراف مانند G ، زیرگراف خود است.

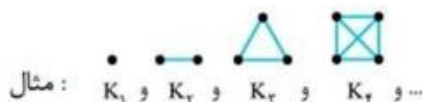
مثال: پنج زیرگراف برای گراف روبه‌رو بنویسید:



✓ مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با G^1 یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همان مجموعه رأس‌های گراف G است و بین دو رأس از گراف $\bar{G}$ یک یال است؛ اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.

اگر گراف‌های G و $\bar{G}$ را روی هم قرار دهیم، به صورتی که رأس‌های هم‌نام روی هم قرار بگیرند، از هر رأس یک یال به رأس‌های دیگر رسم شده است. «گراف کامل»

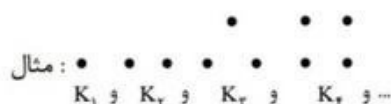
✓ گراف کامل: گرافی که هر رأس آن به تمام رأس‌های دیگر آن وصل باشد را گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل P رأسی را با K_P نمایش می‌دهیم.



در گراف کامل، تمام یال‌های ممکن رسم شده است، در نتیجه تعداد یال‌های برابر است با تعداد انتخاب‌های دو رأس از تعداد کل رأس‌ها.

$$q(K_p) = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

تعداد یال‌های یک گراف کامل: $q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ ؛ برابر با $(p-1)$ است. یعنی یک گراف: $(p-1)$ - منتظم. همچنین مکمل گراف کامل K_p برابر با گراف تهی $\bar{K}_p$ است.



مثال: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید:

(الف) دو یال را می‌نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند.

(ب) در یک گراف K - منتظم؛ ماکزیمم درجه رأس برابر با است.

(ج) تعداد یال‌های گراف K_4 ، برابر است.

(د) گراف k - منتظم از مرتبه n یعنی

راه‌حل: (الف) مجاور K (ب) $q(K_4) = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ (ج) K (د) گرافی با تعداد رئوس n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر عدد k و $(0 \leq k < n)$ باشد.

مثال: در گراف G ، درجه رأس V برابر با ۹ است و درجه رأس V در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید

راه‌حل: از اون جایی که $d_G(V) + d_{\bar{G}}(V) = p - 1$ در نتیجه: $q + 12 = p - 1$

$$\rightarrow p = 22 \quad \text{مرتبه گراف } G$$

مثال: اگر G یک گراف P رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف G و $\bar{G}$ و K_p وجود دارد

راه‌حل: مجموع تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ برابر با تعداد یال‌های گراف کامل یعنی K_p است.

یعنی: $q_G + q_{\bar{G}} = q_{K_p} \rightarrow q_{K_p} = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

رابطه بین مرتبه و اندازه: اگر یک گراف ساده از مرتبه p باشد، حداکثر تعداد یال‌های آن یا اندازه گراف، با تعداد انتخاب دو رأس از رأس p به دست می‌آید و حداقل تعداد یال‌ها با اندازه گراف برابر صفر است.

یعنی: $0 \leq q \leq \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q_{\max} = \frac{p(p-1)}{2}$ و $q_{\min} = 0$

همچنین اگر G یک گراف و با مرتبه p و اندازه q و $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ مجموعه‌ی رئوس آن باشد. آنگاه داریم:

$$d(V_1) + d(V_2) + d(V_3) + \dots + d(V_p) = 2q$$

یعنی مجموع درجات تمام رأس‌ها: برابر با ۲ برابر تعداد یال‌هاست. باور نداری؟! برا خودت مثال بزن من که دروغ ندارم بگه که



مثال: درجه رأس‌های یک گراف به صورت ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵ و ۹ است. مرتبه و اندازه گراف؟

راه‌حل: $1+1+2+3+3+4+5+9 = 2q \Rightarrow 24 = 2q \Rightarrow q = 12$

مرتبه گراف هم که برابر تعداد رأس‌هاست. تو صورت سوال درجه ۸ رأس رو گفته، پس حتماً $p = 8$ بوده!

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد در هر گراف، عددی زوج است.

مسیر درنگ گراف: اگر u و v در رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u و v در گراف G ، دنباله‌ای از رأس‌های روبه‌رو

متمايز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، در G مجاور هم باشند.

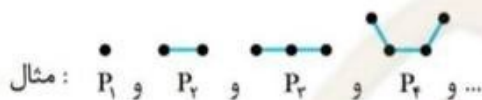
طول مسیر: طول مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود آن «مسیر در یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر»
تذکر: حواستون باشه که در طول مسیر u به v ، از روی یک رأس دوبار عبور نکنید!

✓ در یک گراف، تعداد رأس‌های گراف، برابر تعداد مسیرهای به طول صفر است و تعداد یال‌های گراف، برابر تعداد مسیرهای به طول یک است.

✓ همچنین در مشخص کردن مسیر، جهت حرکت اهمیتی ندارد.

✓ گراف P_n : گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهیم.

✓ چند نکته مهم در رابطه با گراف P_n :



۱- گراف P_1 : هم برابر گراف K_1 و هم برابر گراف تهی $\bar{K}_1$ است.

۲- گراف P_2 : هم برابر با گراف K_2 و هم برابر با گراف 1 -منتظم است.

۳- بین هر دو رأس از گراف P_n ، فقط یک مسیر وجود دارد.

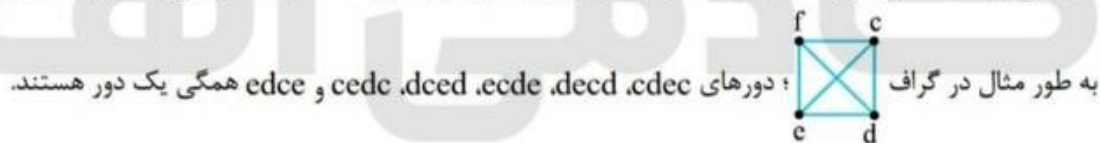
۴- تعداد یال‌ها در گراف P_n ، برابر با $n-1$ است.

مثال: چه رابطه‌ای میان مرتبه و اندازه در گراف P_n وجود دارد؟

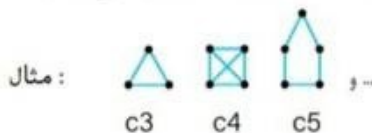
راه‌حل: طبق چیزی که تو تعریف گراف P_n گفتیم، تعداد مرتبه در این گراف یکی از اندازه گراف بیشتره، یعنی $p = q + 1$. بنابراین اندازه و مرتبه در گراف P_n دو عدد متوالی هستند که یکی زوج و یکی فرده. در نتیجه اگر تو سوالی پرسیده شد مجموع اندازه و مرتبه دو گراف P_n فرده یا زوج بلند داد بزنی فردا! 😊

✓ دور: یک دور به طول m در گراف G ، دنباله‌ای از $m+1$ رأس است که m رأس اول آن همگی با هم متفاوت‌اند اما رأس آخر «رأس $m+1$ » همان رأس اول است.

تذکر: حواستون باشه که در مشخص کردن دور، از روی رأس تکراری عبور نکنیم و همواره از روی یال‌ها رد بشیم. همچنین حواستون باشه که دورهایی که دارای تعداد رأس‌های برابر و حروف یکسان هستند، یک دور می‌باشند و با هم فرقی ندارند.



✓ گراف C_n : گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n به طوری که $n \geq 3$ باشد نمایش می‌دهیم.



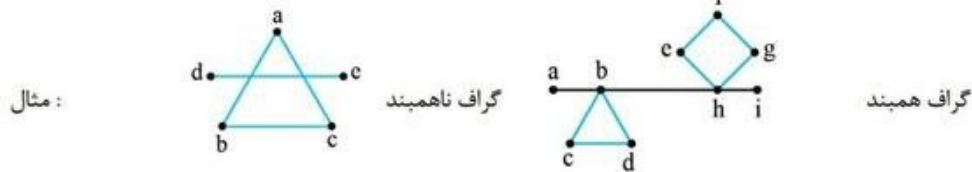
✓ چند نکته مهم در مورد گراف C_n :

۱- گراف C_3 برابر گراف کامل K_3 است.

۲- مرتبه و اندازه در گراف C_n با هم برابرند $p = q$

۳- گراف C_n یک گراف 2 -منتظم از مرتبه n است!

همبندی در گراف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر اینصورت آن را ناهمبند می‌نامیم.



زیرا به طور مثال از رأس e مسیری به رأس b وجود ندارد.

چند نکته مهم راجب گراف‌های همبند و ناهمبند:

- ۱- گراف کامل K_n همبند است و گراف تهی $\bar{K}_n$ ناهمبند است. البته به جز $\bar{K}_1$ که همبند می‌باشد.
 - ۲- گراف‌های C_n و P_n همبند هستند.
 - ۳- اگر گرافی از مرتبه p دارای تعداد یال‌های کمتر از $p-1$ باشد، یا به عبارتی $(q \leq p-2)$ ، حتماً ناهمبند است.
 - ۴- اگر در گراف ساده G ، بزرگترین درجه گراف برابر $p-1$ باشد، یا به عبارتی $(\Delta = p-1)$ ، همبند است.
- مثال:** گراف ساده G از مرتبه ۸، ناهمبند است. حداکثر اندازه گراف G ؟
- راه‌حل:** کافیست یک رأس رو به صورت رأس تنها و ۷ رأس دیگر رو به صورت گراف کامل K_7 در نظر بگیریم تا Q در حداکثرترین مقدار خودش باشه و همچنین این گراف ۸ رأسی ناهمبند باشد.

$$q_{\max} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \Rightarrow q_{\max} = 21$$

مجموعه احاطه‌گر: زیرمجموعه D از رأس‌های گراف G را مجموعه احاطه می‌نامیم؛ هرگاه هر رأس از گراف که در مجموعه D نباشد را انتخاب کنیم؛ حداقل به یکی از رأس‌های مجموعه D وصل باشد.

در نتیجه قطعاً مجموعه‌ای شامل تمام رأس‌های گراف G ، همواره یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است.

مجموعه احاطه‌گر مینیمم: «بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، به مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه احاطه‌گر مینیمال: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌نامند.

تذکره: با توجه به تعاریف خواستون خوب جمع کنید که هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. ولی برعکس این قضیه لزوماً همواره درست نیست.

مینیمال $\leftarrow$ حذف شد دیگه احاطه‌گر نیست
جمع‌بندی: مینیم $\leftarrow$ یعنی کمترین تعداد رأس رو داشته باشه
 $\Leftarrow$ هر مینیممی حتماً مینیمال هست. ولی برعکس لزوماً درست نیست!

اگر a یک عدد حقیقی باشد، $[a]$ را کف a و $\lceil a \rceil$ را سقف a می‌نامیم.

کران پایین عدد احاطه‌گر: اگر G یک گراف n رأسی با ماکسیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه‌گر در آن باشد،

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \quad \text{آنگاه } |D| \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \text{ و از آنجا که } \gamma(G) \text{ نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است، همواره داریم:}$$

مثال: جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

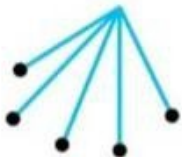
الف) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.

ب) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامیم.

ج) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر می‌نامیم.

د) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با

! راه‌حل: الف) $p-1$ یعنی تقریباً به طور مثال اگر $p=6$ باشد؛ یه همچین شکلی داریم:



ب) مینیمم

ج) مینیمال

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \quad \text{د)}$$

آکادمی الف

فصل سوم: ترکیبات

✓ شمارش

اصل جمع: اگر بتوان کاری را به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول، m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m + n$ انتخاب وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر بتوان کاری را به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

← در مسائل مربوط به شمردن، ابتدا حالت‌های مختلف را در نظر می‌گیریم و در هر حالت شمارش را انجام می‌دهیم و سپس با استفاده از اصل جمع، تعداد کل را به دست می‌آوریم.

اصل ضرب: برای انجام کارهای یک مرحله‌ای از اصل جمع استفاده می‌کنیم. اما اگر برای انجام دادن یک کار، به انجام چندین مرحله نیاز داشته باشیم، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول، m روش موجود باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را به توان به n روش انجام داد، در این صورت کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول n_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام، m_k روش وجود داشته باشد «با فرض این که در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد» کار مورد نظر به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

✓ جایگشت:

به هریک از حالت‌های قرار گرفتن چند شی متمایز کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم:

مثال: تمام جایگشت‌های ممکن با حروف a و b و c را بنویسید؟

راه حل: $3 \times 2 \times 1 = 6 \rightarrow$ به عبارتی abc و acb و bac و bca و cab و cba

فاکتوریل: اگر n ، یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ «فاکتوریل» نمایش می‌دهیم.

یعنی تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر $n!$ است.

← و حتی می‌توان از $n!$ استفاده کرد که اشیاء متمایز باشند.

به عنوان مثال تعداد کلمات چهار حرفی که بدون تکرار حروف و با حروف a و b و c و d ساخته می‌شود، برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شی متمایز و این تعداد بنابر نکته فوق برابر $4!$ می‌باشد.

← در مسائل مربوط به تعداد کلمات n حرفی با n حرف متمایز (بدون تکرار حروف) و یا تعداد اعداد n رقمی با n رقم متمایز (بدون تکرار ارقام) (در صورتی که فاقد رقم صفر باشد) از $n!$ استفاده می‌کنیم. اگر در رقم‌ها، رقم صفر وجود داشته باشد، ابتدا باید رقم سمت چپ را با بقیه ارقام (به غیر از رقم صفر) پر کرده (به $n-1$ طریق) و سپس بقیه مکان‌ها را با $n-1$ رقم دیگر، به $(n-1)!$ طریق پر نمود.



← اگر در مسائل مربوط به جایگشت گفته شود: «چند شی خاص کنار هم باشند» یا «دو شی خاص کنار هم نباشند»، باید آنها را به عنوان یک بسته و آن بسته را مانند یک شی در کنار بقیه اشیا در نظر بگیریم. به این نکته هم توجه کنید که اشیاء داخل بسته می‌توانند جایگشت داشته باشند.

مثال: چند عدد شش رقمی با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت. به طوری که همواره ارقام فرد، کنار هم و ارقام زوج نیز کنار هم باشند.

راه‌حل: ۳ رقم فرد را باید مانند یک بسته و به صورت ۷ و ۵ و ۳ در نظر گرفت.

۳ رقم زوج هم همینطور به صورت ۶ و ۴ و ۲ در نظر می‌گیریم. این دو بسته دارای ۲! جایگشت هستند. از طرفی هر بسته ۳! جایگشت دارد. پس طبق اصل ضرب برابر است با:

$$2! \times 3! \times 3! = 72$$

✓ جایگشت‌های ۲ تایی از n شی متمایز:

تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از n شی متمایز یا به عبارتی انتخاب‌های ۲ شی از n شی متمایز که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد؛ چی شد؟! چی گفتیم؟! گفتیم ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم و به آن تبدیل نیز می‌گوییم.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$ عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت.

← نکته اینجاست که دو استفاده از جایگشت تکرار ارقام و یا اشیاء جایز نیست.

✓ ترکیب:

به هر انتخاب ۲ تایی از n شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیتی نداشته باشد و یا به عبارتی به هر زیرمجموعه ۲ عضوی از n شی متمایز، یک ترکیب ۲ تایی از آن شی می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های ۲ تایی از n شی متمایز را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad (0 \leq r \leq n)$$

برای اینکه فرمول‌ها رو با هم قاطی نکنید این مثال رو حل کنید:

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را بیابید: الف) $\frac{P(5, 3) + P(7, 2)}{P(9, 3)}$ ب) $\frac{C(10, 2) + C(6, 1)}{C(7, 3) + C(8, 0)}$

راه‌حل:

$$\text{الف) } P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60, \quad P(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!} = 42, \quad P(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

$$\Rightarrow \frac{60 + 42}{504} = \frac{102}{504} = \frac{17}{84}$$

$$\text{ب) } C(10, 2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45, \quad C(6, 1) = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6, \quad C(7, 3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

$$C(8, 0) = \frac{8!}{0! \times 8!} = 1 \Rightarrow \frac{45 + 6}{35 + 1} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

قرار داد: $0! = 1$

← البته اینا که برا این بود تا فرمول ها در ذهنتون نقش ببندد؛ بحث اصلی اینه که بتونی تشخیص بدی تو کدوم مسئله ترتیب مهمه « $P(n,r)$ » و تو کدوم مسئله ترتیب مهم نیست « $C(n,r)$ »

البته نگران نباشید یواش یواش دستتون میاد که چی کار کنید. بابا تا منو دارید غم ندارید.

✓ چند نکته مهم در رابطه با قواعد ترکیب:

یعنی فقط ۱ حالت برای انتخاب ۵ تا یا هیچی از ۵ شی مختلف داریم!

$$۱. \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = ۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۵} = ۱, \binom{۵}{0} = ۱$$

$$۲. \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۱}{1} = ۱۱, \binom{۱۱}{10} = ۱۱$$

$$۳. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{7} = \binom{۱۰}{3}$$

$$۴. \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۲۰}{2} = \frac{۲۰ \times ۱۹}{2} = ۱۹۰$$

$$۵. \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{3} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{3 \times 2 \times 1} = ۱۲۰$$

مثال: از بین ۲ کتاب فیزیک، ۶ کتاب ریاضی و ۷ کتاب شیمی «کتاب‌ها همگی متمایزند» به چند طریق می‌توان ۴ کتاب انتخاب کرد به طوری که حداقل سه تای آنها ریاضی باشد؟

راه‌حل: اگر ۳ کتاب از ۴ کتاب انتخاب شده و یا اصلاً هر ۴ کتاب انتخاب شده ریاضی باشد، ۲ حالت داریم:

۱. ۳ کتاب ریاضی از ۶ کتاب ریاضی و یک کتاب غیرریاضی از $۷+۲=۹$ کتاب غیرریاضی انتخاب شده:

$$\binom{۶}{3} \times \binom{۹}{1} = ۱۸۰$$

۲. هر ۴ کتاب انتخاب شده ریاضی باشد: $\binom{۶}{4} = ۱۵$
بنابراین $۱۸۰+۱۵=۱۹۵$ راه مختلف داریم.

✓ جایگشت با تکرار:

در عدد ۱۲۱۳۲۲، سه رقم ۲ و یک رقم ۳ و دو رقم ۱ وجود دارد. اگر بخواهیم تمام اعداد ۶ رقمی با این ارقام و با همان تعداد اعداد بنویسیم، آنگاه برای به دست آوردن تعداد آنها از فرمول ۶! نمی‌توان استفاده کرد. زیرا اگر یادتان باشد زمانی می‌توانیم از فرمول ۶! استفاده کنیم که ۶ شی متمایز داشته باشیم. پس چه کنیم؟

← تعداد جایگشت‌های n شی به طوری که n_1 تای آنها همانند هم و از یک نوع باشند، n_2 تای آنها نیز همانند یکدیگر و به همین ترتیب ... و n_K تای آنها همانند هم و از یک نوع باشند برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_K!}, \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_K = n)$$

به طور مثال در مسئله بالا داریم:

$$\frac{۶!}{۲! \times ۳! \times ۱!} = ۶۰$$

← هنگام استفاده از فرمول جایگشت با تکرار در ساختن عدد؛ وقتی که k رقم صفر وجود داشته باشد، باید در صورت کسر به جای استفاده از $n!$ از $(n-K) \times (n-1)!$ استفاده کرد که $n-K$ همان تعداد ارقام غیر صفر می‌باشند.

مثال: چند عدد صحیح ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۰ و ۵ و ۵ و ۶ می توان نوشت؟

راه حل: با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{3 \times 4!}{2! \times 2!}$$

تعداد ۵ ها تعداد صفرها

← اگر n شی داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت های n تایی با تعداد جایگشت های $(n-1)$ تایی این اشیا با هم برابرند. مثلاً تعداد اعداد پنج رقمی با ارقام متمایز ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ با تعداد اعداد چهاررقمی برابر است. فکر کردید از این نکته مسخره هاست که به دردتون نمی خوره! مثال بعد رو حل کنید!

مثال: چند عدد شش رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ می توان نوشت؟

راه حل: چون ۷ شی داریم و می خواهیم تعداد جایگشت های ۶ تایی را به دست آوریم، کافیت با توجه به نکته قبل تعداد جایگشت های ۷ تایی را با استفاده از فرمول به دست آوریم:

$$\text{تعداد ارقام ۷ رقمی} = \frac{7!}{4! \times 2! \times 1!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 105$$

تعداد ۴ ها تعداد ۲ ها تعداد ۱ ها

☑ انتخاب n شاخه گل به دلخواه از k نوع گل مختلف:

تعداد راه های مختلف برای n شاخه گل از بین k نوع گل برابر است با:

$$\binom{n+K-1}{K-1}$$

مثال: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۸ شاخه گل از بین ۵ نوع گل انتخاب کرد؟ به چند طریق می توانیم این دسته گل را انتخاب کنیم. به طوریکه از هر نوع گل یک شاخه گل انتخاب کنیم؟

راه حل: تعداد راه های انتخاب ۸ شاخه گل از بین ۵ نوع گل $K=5$ برابر است با:

$$\binom{n+K-1}{K-1} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times 8!} = 495$$

حالا وقتشه شرط حداقل رو لحاظ کنیم؛ یعنی اول ۵ شاخه گل از هر نوع رو انتخاب کنیم، بعد ۳ شاخه گل باقی مونده رو به طور دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب کنیم.

$$\binom{n+K-1}{K-1} \xrightarrow[n=3]{K=5} \binom{3+5-1}{5-1} = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

☑ پیدا کردن تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی:

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$ برابر است با تعداد انتخاب های دلخواه n شاخه گل از بین

k نوع گل، یعنی برابر است با: $(n \geq 0)$

$$\binom{n+K-1}{K-1}$$

در این فرمول، K تعداد مجهول های $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$ است. همچنین این تعداد جواب وقتی برقرار است که به ازای هر i ، $x_i \geq 0$ باشد.

البته در این معادله، هیچ یک از متغیرها نباید دارای ضریب، توان و یا ... باشد تا بتوان از فرمول استفاده کرد.

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ چقدر است؟
راه‌حل: طبق فرمول $K=3$ و $n=13$ است بنابراین: $\binom{13+3-1}{3-1} = \frac{15!}{2! \times 13!} = 105$

مثال: معادله $x_1^2 + x_2 + x_3 = 5$ چند دسته جواب صحیح و نامنفی دارد؟

راه‌حل: با توجه به آخرین نکته‌ای که گفتیم، متغیر x_1 دارای توان ۲۰ است و از فرمول فوق نمی‌توانیم استفاده کنیم پس حالا چه خاکی تو سرمون بریزیم؟!

بیاییم به x_1 که دارای توان است، مقدار صحیح و نامنفی $\{0, 1, 2, \dots\}$ رو یکی یکی بدیم و امتحان کنیم و ببینیم چی

میشه. $x_1 = 0 \rightarrow x_1^2 = 0 \rightarrow 0^2 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow x_2 + x_3 = 5$

توجه کنید که K تعداد مجهول‌هاست
و معادله‌ی $x_2 + x_3 = 5$ دارای ۲ مجهول است: $K=2$

$$\xrightarrow[\text{حالا داریم}]{K=2, n=5} \binom{5+2-1}{2-1} = 6 \rightarrow$$

$$x_1 = 1 \rightarrow x_1^2 = 1 \rightarrow x_2 + x_3 = 4 \xrightarrow{K=2, n=4} \binom{4+2-1}{2-1} = 5$$

$$x_1 = 2 \rightarrow x_1^2 = 4 \rightarrow x_2 + x_3 = 1 \rightarrow \binom{1+2-1}{1} = 2$$

غلطه آی غلطه! دیگه غیرممکنه! $x_1 = 3 \rightarrow x_1^2 = 9 \rightarrow x_2 + x_3 = -4$

چطور ممکنه که جمعه ۲ عدد نامنفی بشه منفی؟! $6 + 5 + 2 = 13$

بنابراین سه دسته جواب به تعداد ۶ و ۵ و ۲ داریم. در نتیجه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی برابر است با: ۱۳
 ← برای برخی یا همه‌ی x_i هایی که دارای شرط حداقلی برای معادله‌ی $x_1 + \dots + x_K = n$ می‌باشند را به صورت زیر حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط $x_1 \geq 3, x_2 > 1, x_3 \geq 2$ دارا یچند جواب صحیح و نامنفی است؟

راه‌حل: خوب حواس‌تونو جمع کنید که از این سؤال‌ها زیاد خواهید دید!

اولاً اینکه $x_2 > 1$ رو به صورت $x_2 \geq 2$ می‌نویسیم. قانونشه! پس چی شد؟! هر جا علامت > دیدی تبدیلتش می‌کنی به $\geq$!
 بریم سراغ بقیه سؤال !

$$\left. \begin{aligned} x_1 \geq 3 &\Rightarrow y_1 = x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0, x_1 = y_1 + 3 \\ x_2 \geq 2 &\Rightarrow y_2 = x_2 - 2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0, x_2 = y_2 + 2 \\ x_3 \geq 1 &\Rightarrow y_3 = x_3 - 1 \geq 0 \Rightarrow y_3 \geq 0, x_3 = y_3 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

حالا معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ رو برحسب y_1 و y_2 و y_3 می‌نویسیم.

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 2) + (y_3 + 1) = 10 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$$\xrightarrow[n=4]{K=3} \text{تعداد جواب‌ها: } \binom{4+3-1}{3-1} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

← تعداد جواب‌های صحیح و مثبت «طبیعی» معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با تعداد انتخاب‌های n شاخه گل از این k نوع گل به طوری که از هر نوع حداقل یک شاخه گل انتخاب کنیم، برابر است و این تعداد از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

در انتهای این بحث پیشنهاد می‌کنم کار در کلاس صفحه ۶۱ کتاب درسی رو حتماً با دقت انجام بدین! ☺

✓ مربع لاتین:

یک جدول به شکل یک مربع $n \times n$ که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱ و ۲ و ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک «مربع لاتین» می‌نامیم و هریک از اعداد درون یک مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، باز هم مربع حاصل یک مربع لاتین است.

۱	۲	۳	...	n
n	۱	۲	...	$n-1$
$n-1$	n	۱	...	$n-2$
$n-2$	$n-1$	n	۱	...
۲	۳	۴	...	۱

مربع لاتین چرخشی بدین صورت است که:

در هر سطر که به سطر بعدی می‌رویم،

عدد آخر سطر جدا می‌شود و در اول سطر بعدی قرار می‌گیرد!

جایگشت روی اعضا یعنی مثلاً به جای هر ۲، ۳ قرار دهیم و به جای هر ۳، مثلاً ۲ قرار دهیم! $\begin{matrix} 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$ با انجام این کار، یک مربع جدید به دست می‌آید که باز هم یک مربع لاتین است.

✓ مربع لاتین متعامد:

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانه‌ی آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B «و یا برعکس» است. در این صورت دو مربع A و B با هم متعامدند. اگر و تنها اگر هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند. به طور مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

و $B =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A, B =$

$$\begin{bmatrix} 33 & 44 & 11 & 22 \\ 41 & 32 & 23 & 14 \\ 12 & 21 & 34 & 43 \\ 24 & 13 & 42 & 31 \end{bmatrix}$$

اگر در دو مربع لاتین هم مرتبه دو درایه یکسان با خانه‌های نظیر یکسان داشته باشیم آن دو مربع لاتین متعامد نمی‌باشند؛ مانند:

	a	
		a

	b	
		a

این دو مربع متعامد نخواهند بود:

جایگشت و تأثیرش بر متعامد بودن ۲ مربع لاتین:

اگر دو مربع لاتین، متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید با مربع لاتین دیگر متعامد است. یعنی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند، B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_1 نیز متعامدند.

جمع‌بندی: اگر دو تا متعامد داشته باشیم، بعد یکیش رو با جایگشت عوض کنیم، مربع جدید با اون یکی مربع باز هم متعامد میشه.

ولی حواست باشه که مربع جدید با اون مربع قبلیه که جایگشت روش انجام شد، متعامد نیست!

امیدوارم قاطی نکرده باشی! ☺

در انتهای این مبحث هم باز پیشنهاد می‌کنم مثال دوم ص ۶۸ و کار در کلاس ص ۶۹ رو با دقت حل کنید؛ سوالات امتحان نهایی شباهت زیادی با این مسئله‌ها دارند!

اصل شمول و عدم شمول:

اگر A یک مجموعه متناهی باشد، تعداد عضوهای A را با $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم.

حال اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه A و B : اگر A و B دو مجموعه متناهی از مجموعه S باشند آنگاه تعداد

عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

مثال: از بین اعداد مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ چند عدد وجود دارد که؟

الف) این عدد مضرب ۲ باشد. **ب)** این عدد مضرب ۳ باشد. **ج)** این عدد مضرب ۲ یا ۳ باشد.

راه‌حل: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که بر k بخش‌پذیر است، برابر $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ است.

$$|A| = \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor = 100$$

الف)

$$|B| = \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor = 66$$

ب)

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{3 \times 2} \right\rfloor = 33$$

ج)

$$\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 66 - 33 = 133$$

$$|(A \cup B)'| = |\overline{(A \cup B)}| = |S| - |A \cup B|$$

✓ متمم در اصل شمول و عدم شمول:

$$\Rightarrow |(A' \cap B')| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \quad \text{با توجه به تعریف متمم داریم:}$$

✓ اصل شمول برای سه مجموعه:

اگر A و B و C مجموعه‌هایی از مجموع مرجع C باشند آنگاه:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|(A \cup B \cup C)'| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

✓ متمم اصل شمول برای سه مجموعه:

که طبق قانون دمورگان که در ریاضی دهم و نهم خوانده‌ایم داریم:

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}|$$

✓ تفاضل دو مجموعه:

اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، تعداد عضوهای تفاضل این دو مجموعه برابر است با:

$$|A - B| = |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B|$$

مثال: در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰، ۵۰۰ و $n < 1$ چند عدد وجود دارد که بر ۳ بخش پذیر باشند ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد؟

راه حل: A اعداد بخش پذیر بر ۳ و B اعداد بخش پذیر بر ۴ که در این بازه هستند را تعریف می‌کنیم.

$$|A - B| = |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B| \quad \text{و} \quad |A| = \left[\frac{500}{3} \right] = 166 \quad \text{و} \quad |B \cap A| = \left[\frac{500}{12} \right] = 41 \\ \Rightarrow |A \cap \bar{B}| = 166 - 41 = 125$$

✓ تعداد توابع:

اول بهتره تعریف تابع رو یادآوری کنیم: اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد آنگاه دامنه تابع f با مجموعه A برابر

است و برد تابع f ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه B است. به زبان ریاضی:

$$R_f \subseteq B \quad \text{و} \quad D_f = A \quad \text{دامنه} \quad \text{و} \quad f: A \rightarrow B \quad \text{تابع}$$

حالا اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ ، آنگاه تعداد کل توابع از A به B برابر است با: n^m

نتیجه گیری ← پس چی شد؟! تعداد توابع برابر است با تعداد برد به توان دامنه!

مثال: تعداد توابع از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی؟

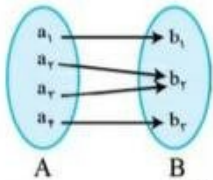
$$3^4 = 81 \quad \text{😊 راه حل:}$$

تابع یک به یک و تعداد آن:

اول لازم بهتره تعریف تابع یک به یک رو یادآوری کنیم: تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاست را یک تابع یک به یک می‌گوییم هرگاه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها متمایز باشند.

حالا تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی $|A| = n$ عضوی، به یک مجموعه $|B| = m$ عضوی با شرط اینکه $n \leq m$ یعنی برد؛ بزرگتر مساوی دامنه باشد؛ برابر است با تعداد جایگشت‌های n شی از بین m شی!

مثال: تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۳ عضوی به مجموعه ۵ عضوی؟



$$(m)_n = p(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

راه حل: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

تابع پوشا:

تابع f از مجموعه A به مجموعه B ، به طوری که برد تابع برابر مجموعه B باشد، یک تابع پوشا است. یعنی $R_f = B$ به طور مثال در مجموعه مقابل چون روی تمام اعضای A ، پیکانی رسم شده و به این تابع پوشا می‌گویند.

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ مداد متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل امداد داده باشیم.

راه حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد توابع از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، به طوری که برد این تابع‌ها همه‌ی آن ۳ عضو باشند. یعنی به هر نفر از اعضای برد حداقل یک مداد از دامنه نسبت داده بشود.

$$A_j = \{f: A \rightarrow B | f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|B| = |B|^{|A|} = 3^5 = 243$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^5 = 1, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

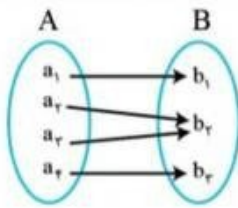
$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$$

تذکره ۱: این فرمول دو کتاب درسی ذکر شده پس بد نیست آن را حفظ باشیم.

تعداد توابع مثل $f: A \rightarrow B$ با فرض آنکه $|A| = m \geq 3$ و $|B| = 3$ باشد به طوری که $R_f = B$ از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. $3^m - (3 \times 2^m - 3)$

تذکره ۲: قبلاً برای حل مسائلی که می‌خواستیم n شی یکسان را در k گروه متمایز تقسیم کنیم، در حالت‌های مختلف از جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ استفاده می‌کردیم!

اما اگر بخواهیم n شی متمایز را در k گروه متمایز تقسیم کنیم، از تعداد توابع یک به یک و پوشا استفاده می‌کنیم.



مثال: به چند طریق می‌توان چهار غذای متفاوت را بین ۳ نفر پخش کرد به طوری که هر نفر حداقل یک غذا برسد؟

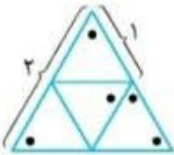
راه‌حل: اگر چهار غذای متفاوت را با a_i و سه نفر را با b_i نمایش دهیم، یکی از جواب‌ها با نمودار پیکانی زیر نمایش داده شده است.

در نمودار پیکانی، شخص b_1 یک غذای a_1 و به شخص b_2 ، دو غذای a_2 و a_3 و به شخص b_3 غذای a_4 داده شده است. تعداد حالت‌های ممکن برابر پیدا کردن تعداد توابع از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B با شرط $R_f = B$ است که تعداد این توابع برابر است با:

$$3^m - (3 \times 2^m - 3) \xrightarrow{m=4} 3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 81 - 48 + 3 = 36$$

✓ اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم به طوری که تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر باشد $m > n$ و تمامی کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار گرفته است.



مثال: یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ واحد مفروض است. نشان دهید اگر ۵ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت، به طوری که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد؟

راه‌حل: اضلاع مثلث را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم شده را به هم وصل می‌کنیم تا ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ پدید آید، اگر ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث را لانه در نظر بگیریم « $5 > 4$ »، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارد که در یک لانه قرار می‌گیرند و چون طول هر مثلث برابر ۱ است پس فاصله آن دو نقطه از یکدیگر حتماً کمتر از ۱ خواهد بود. در نتیجه اثبات شد حداقل ۲ نقطه بین این نقاط فاصله کمتر از ۱ دارند.

← تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر، در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر در آن قرار گرفته است. حال اگر $1 \leq r < n$ و $m = nk + r$ کبوتر، n لانه را اشغال کند، در این صورت باز هم حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $k + 1$ کبوتر قرار می‌گیرند.

تذکر: برای به دست آوردن مقدار k ، m را بر n تقسیم می‌کنیم. اگر باقی‌مانده صفر شود، حداقل تعداد کبوترها همان خارج قسمت (k) و اگر باقی‌مانده عددی غیر صفر شد، حداقل تعداد کبوترها $k + 1$ « $1 +$ خارج قسمت» خواهد بود.