



کمپین حمایت از نهایی های امسال

جزوه خلاصه نکات طلایی



www.alefac.ir

[@arsalanfirouznia](https://www.instagram.com/arsalanfirouznia)

[academyfirooznia](https://www.telegram.com/academyfirooznia)





۱ معادله هم‌نهشتی $11 \equiv 1402x \pmod{9}$ را حل کنید.

۲ اگر چهاردهم خردادماه سالی سه‌شنبه باشد، در این صورت بیست و دوم بهمن همان سال چه روزی خواهد بود؟

۳ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۴ اولاً: ثابت کنید اگر $a|b$ ، آنگاه $a|bc$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). ثانیاً: برای مقادیر صحیح c, b, a مثالی بیاورید که $a|bc$ برقرار باشد ولی هر دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.

۵ اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

$$a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2)$$

۶ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a + b > 0$ ، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{+b^2}{+b} \geq ab$$

۷ به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۸ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

۹ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:

اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۱۰ به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۲ فرض کنیم، $a \equiv^m b$ و $b \equiv^n c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv^d c$.



ثابت کنید:

۱۳

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.
(راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m+1)$ و ثابت کنید $d \mid 1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

۱۴ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $2a \mid 5m - 2, 2a \mid 3m - 4$ جواب‌های صحیح a را مشخص کنید؟ ($m \in \mathbb{Z}$)

۱۵

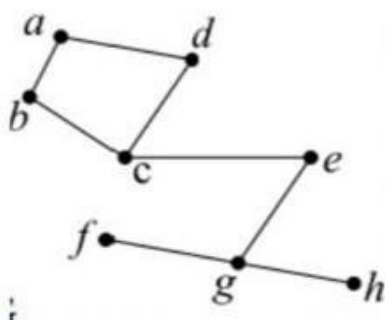
درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می‌باشد.

۱۶

به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۱۷

گراف G را در نظر بگیرید.
الف) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.
ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید.



۱۸ اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد، مقدار $q(\overline{G})$ را محاسبه نمایید.

۱۹

در هر گراف از مرتبه فرد، ثابت کنید تعداد رأس‌های زوج، عددی فرد است.

۲۰

یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

۲۱

به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۲۲

گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۲۳

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۲۴

به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل)

ثابت کنید: ۱۳

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.
(راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m+1)$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$).

۱۴ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $2a|5m-2$, $2a|2m-4$ جواب‌های صحیح a را مشخص کنید؟ ($m \in \mathbb{Z}$)

۱۵ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

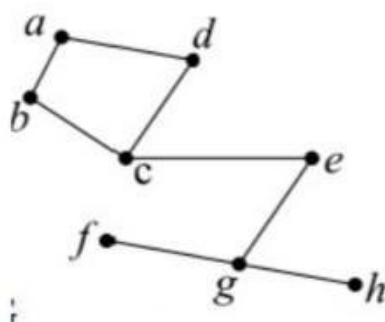
اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می‌باشد.

۱۶ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۱۷ گراف G را در نظر بگیرید.

الف) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید.



۱۸ اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد، مقدار $q(\overline{G})$ را محاسبه نمایید.

۱۹ در هر گراف از مرتبه فرد، ثابت کنید تعداد رأس‌های زوج، عددی فرد است.

۲۰ یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

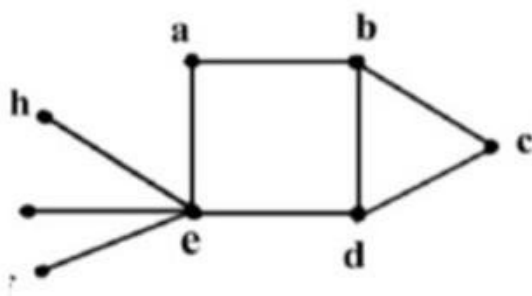
۲۱ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۲۲ گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۲۳ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

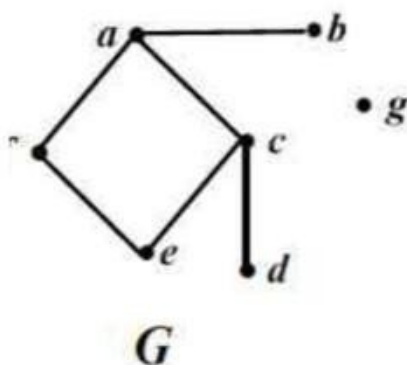
۲۴ به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل)

۲۵ الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.
 ب) این گراف چند χ - مجموعه دارد؟

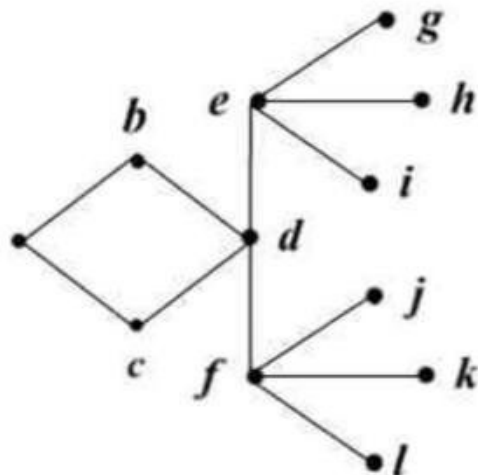


۲۶ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
 الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم.
 ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است.
 ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است.
 د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم.

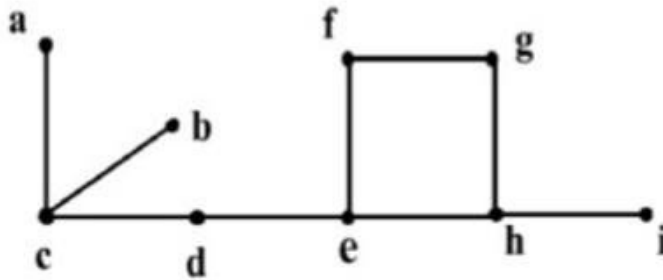
۲۷ گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.
 ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.
 ج) مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.
 د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.
 ه) حاصل عبارت $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(g)$ را به دست آورید.



۲۸ گراف زیر را در نظر بگیرید:
 الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.



۲۹ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.
- گراف ساده با درجه رئوس ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ وجود ندارد.



۳۰ گراف مقابل را در نظر بگیرید.

الف) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.
ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟

۳۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

۳۲ به چند طریق می‌توان ۴ مهره به رنگ‌های سبز، قرمز، آبی و سفید را در ۳ ظرف قرار دهیم، به شرطی که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (ذکر راه‌حل الزامی است.)

۳۳ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.
الف) تعداد 2^n - مجموعه‌های گراف تهی از مرتبه ۴، برابر با است.
ب) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌های ۱، و وجود ندارد.
ج) تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۲ عضوی به مجموعه‌ای ۴ عضوی برابر با است.

۳۴ الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت
 $1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 3$
 $3 \rightarrow 4$
 $4 \rightarrow 1$
 مربع لاتین B را به دست آورید.

	۳	۴	۱	۲
	۲	۱	۴	۳
=	۱	۲	۳	۴
	۴	۳	۲	۱

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

۳۵ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

۳۶ قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یکبار طی کند برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

۳۷ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_2 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

۳۸ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را با شرط‌های $x_1 > 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ به دست آورید.

۳۹) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۴۰) به چند طریق می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم.

۴۱) به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری‌که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

۴۲) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد؟

۴۳) ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

۴۴) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ وجود ندارد.

۴۵) تعداد اعداد ۷ رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۴، ۴ و ۵ می‌توان نوشت را محاسبه کنید.

$$+ 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1 \Rightarrow vx \equiv 2 \Rightarrow vx \equiv -v \xrightarrow{(v,9)=1} x \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1 \quad (\text{ص } 30)$$

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$+ 21 + 21 + 21 + 20 + 20 + 20 + 20 + 22 \equiv ?$$

$$\equiv 0 \Rightarrow \text{سه‌شنبه } 22 \text{ بهمن‌ماه}$$

توجه: چون اختلاف دو تاریخ فوق مضرب ۷ است پس هر سال روز هفته رحلت امام (ره) و ۲۲ بهمن همان سال، یکسان است.

$$= 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 2) + 1 = 2q + 1 \quad (\text{ص } 4)$$

$$a \mid \Rightarrow b = aq \quad (a, q \in \mathbb{Z})$$

اولاً:

$$bc = a(cq) = aq' \Rightarrow a \mid bc$$

$$a = 8, b = 6, c = 4 \Rightarrow 8 \mid 6 \times 4 \text{ ولی } 8 \nmid 6 \text{ و } 8 \nmid 4$$

ثانیاً:

$$+ b^2 + 4(a + b + 2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + (b + 2)^2 \geq 0$$

گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی برقرار است.

(۰/۲۵)

(۰/۵)

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq a b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq (a + b) a b \Leftrightarrow (a + b) (a^2 - a b + b^2) \geq (a + b) a b \Leftrightarrow$$

(۰/۲۵)

$$a^2 - a b + b^2 \geq a b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)

$$+ 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$$

$$- 2xy + y^2 + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$- y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \text{ بدیهی است.}$$

$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0$$

اثبات بازگشتی:

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \text{ همواره برقرار است}$$

$$n = 2 \text{ نباشد} \Rightarrow n = 2k + r, r \neq 0 \text{ فرض } \times$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k.r + r^2 = 2q + r^2 \neq 2q'$$

یعنی n^2 مضرب ۳ نیست که متناقض با فرض مسئله است پس فرض خلف غلط است.

هر کلاه حالت ۲ $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

۱۶

غ ق ق ← حداقل یکی نگ

$$\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} = n(\bar{1}) + n(\bar{2}) + n(\bar{3}) - n(\bar{1} \cap \bar{2}) - n(\bar{1} \cap \bar{3}) - n(\bar{2} \cap \bar{3}) + n(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3})$$

$$2 \times 2^4 - 2 \times 1^4 + 0 = 14$$

$$26 = \text{غ ق ق} - \text{کل جواب}$$

روش اول: الف) $\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta+1} = \frac{4}{4} \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$ برای احاطه کردن رأس‌های f, h حداقل به یک رأس نیاز است

هیچ رأس دیگری به تنهایی نمی‌تواند سایر رأس‌ها را احاطه کند، پس به بیش از دو رأس برای احاطه‌گری نیاز است.

طرفی چون مجموعه $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 2$ پس $\gamma(G) = 2$

روش دوم: برای احاطه کردن رؤس f, g, h, e حداقل به یک رأس نیاز است. همچنین برای چهار رأس باقی مانده

حداقل به دو رأس دیگر نیاز است. یعنی $\gamma(G) \geq 2$ از طرفی مجموعه $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است،

$$\gamma(G) = 2$$

$$\{f, h, e, d, b\}$$

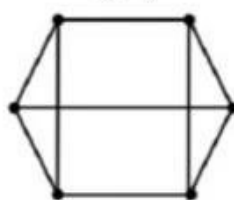
روش اول: $2q(G) = 2p(G) \Rightarrow 2q(G) = 18 \Rightarrow q(G) = 9 \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{6}{2} - 9 = 6$

روش دوم: می‌دانیم مکمل هر گراف منتظم، خود نیز گرافی منتظم است. لذا مکمل گراف ۳- منتظم با ۶ رأس، گراف

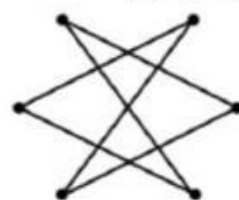
$$2q(\bar{G}) = 2p(G) \Rightarrow q(\bar{G}) = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

$$q(\bar{G}) = 6$$

روش سوم:



G



$\bar{G}$

x : تعداد رأس‌های زوج گراف

روش اول:

$$m = 2k: \text{تعداد رأس‌های فرد گ}$$

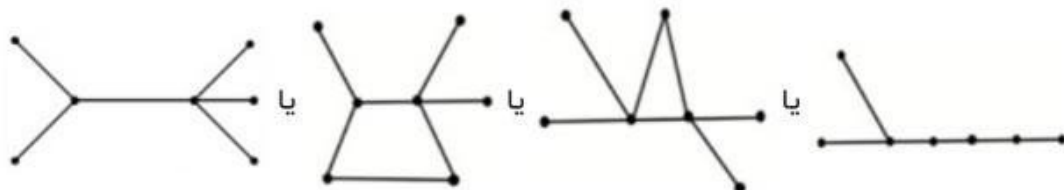
$$p = 2t + 1: \text{تعداد رأس‌های گ}$$

$$= m + x \Rightarrow 2t + 1 = 2k + x \Rightarrow x = 2t + 1 - 2k = 2(t - k) + 1 \Rightarrow x = 2q + 1$$

روش دوم: مجموع تعداد رأس‌های فرد و تعداد رأس‌های زوج این گراف، عددی فرد است. می‌دانیم تعداد رأس‌های ف

در هر گراف، عددی زوج است، لذا تعداد رأس‌های زوج در این گراف باید عددی فرد باشد.

مسئله چندین جواب دارد که چند مورد از آن‌ها رسم شده است.



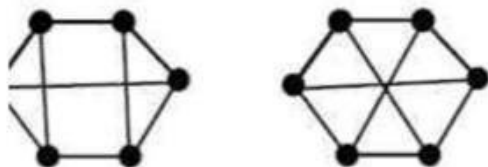
$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

$\uparrow$ انتخاب ۴ $\uparrow$ جایگشت ۴ کلاه

۲۱

$$= 2p - 2 \Rightarrow \frac{2p}{2} = 2p - 2 \Rightarrow p = 6 \text{ (ص ۴۲)}$$

۲۲



به یکی از دو گراف زیر داده شود.

$$-1 = 5 \Rightarrow k = 4, kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53, n = \left\lfloor \frac{53}{4} \right\rfloor = 13 \text{ (ص ۸۲)}$$

۲۳

$$q = \frac{kn}{2} \Rightarrow q = \frac{8 \times 2}{2} = 12$$

$$\Rightarrow 28 - 12 = 16 \text{ (ص ۴۰)}$$

$$q = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

۲۴

الف) می‌دانیم $\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G)$ پس داریم $\frac{8}{5 + 1} \leq \gamma(G)$ در نتیجه $2 \leq \gamma(G)$

۲۵

از طرفی مجموعه‌ای مانند $\{e, c\}$ (هر کدام از مجموعه‌های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شد نیز مورد قبول است) یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف (G) می‌باشد پس $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$

ب) ۳ (ص ۵۰)

الف) همبند (ص ۳۹) ب) زوج (ص ۴۰) ج) $p - 1$ (ص ۴۲) د) $-k$

منتظم (ص ۳۵)

۲۶

$$p = 7, q = 6 \text{ (ص ۳۵)}$$

۲۷

$$2q = 12 \text{ (ص ۳۹)}$$

$$N_G[c] = \{a, c, d, e\} \text{ (ص ۳۶)}$$

$$acefa \text{ (ص ۳۸)}$$

$$2(\bar{G}) + d_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21 \text{ (ص ۳۸)}$$

$$\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma(G) \geq 2 \text{ (ص ۴۹) (*)}$$

۲۸

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنابه رابطه (*): پس $\gamma(G) = 2$

$$B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

$$C = \{a, e, f, b\}$$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

درست ۲۹